

Ⅱ-309 弾性軸を有する誘導電動機系の始動特性

三 木 一 郎*
西 山 栄 枝*

Starting Characteristics of Induction Motor Drive System with an Elastic Shaft

Ichiro MIKI
Sakae NISHIYAMA

Abstract

Starting transient characteristics of the induction motor drive system have been investigated. The fundamental differential equations of the three phase induction motor have been represented by $d-q$ coordinate system, and the motion equations of the system with an elastic shaft have been derived from the simplified theoretical model.

The approximate solutions of these equations have been computed by means of Runge-Kutta-Gill method. The computed values of the primary current and shaft torque have been compared with the experimental results. Consequently, it has been confirmed that the computed results have been good agreed with the measured.

The following consequence have become evident after studying the computed results. The simplified model of the system is practical. Spring constant influences remarkably the waveform of the shaft torque in this system.

Furthermore, the shaft torque is qualitatively described in relation to the natural frequency of the system.

1. ま え が き

誘導電動機などを中心とする回転電気機械の強度設計や製作にあたっては、その機械の過渡および定常状態の特性を把握することが必要である。しかも、特に過渡現象の場合には電動機自身の電磁的な過渡特性だけでなく、機械的に連結されている負荷なども含めた系における過渡応答を知ることも重要である¹⁾。

従来、誘導電動機の過渡現象を求める場合には、運動方程式のシミュレーションモデルとして、電動機の回転子と負荷の慣性体および連結軸等を一つの回転体²⁾とみなしたものを考える場合が多かった³⁾。この方法は簡単であるが、トルクに関しては電磁発生トルクしか求められないこと、軸のねじりを考慮できないなどの問題があ

る。

そこで本論文では、誘導電動機と慣性負荷を弾性軸で連結したシステムの始動特性を求めることを主な目的にして、まず電動機に関する基本方程式を dq 軸座標系で表わした⁴⁾。

次に、軸系の運動方程式を導くために、非常に単純化したシミュレーションモデルを考え、これに基づいて式を求めた。そしてこれらの電気的および機械的な方程式を用いて多数の数値計算を行なった。

さらに、実測結果を示し、計算結果と比較した後、機械的定数の計算結果におよぼす影響および始動時における軸伝達トルク（以後軸トルクと略記する）について検討した。

* 明治大学工学部
Faculty of Engineering, Meiji University

2. 系の基本方程式

2.1 誘導電動機の基本方程式

誘導電動機の固定子および回転回路について、電圧と電流の関係を dq 軸座標系で表わすと次式になる。

$$\begin{pmatrix} v_{ds} \\ v_{qs} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_s + \left(l_s + \frac{3}{2}L_s\right)P & 0 \\ 0 & R_s + \left(l_s + \frac{3}{2}L_s\right)P \\ \frac{3}{2}MP & \frac{3}{2}q\omega_r M \\ -\frac{3}{2}q\omega_r M & \frac{3}{2}MP \\ \frac{3}{2}MP & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}MP \\ R_r + \left(l_r + \frac{3}{2}L_r\right)P & \left(l_r + \frac{3}{2}L_r\right)q\omega_r \\ -\left(l_r + \frac{3}{2}L_r\right)q\omega_r & R_r + \left(l_r + \frac{3}{2}L_r\right)P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ i_{dr} \\ i_{qr} \end{pmatrix} \quad (1)$$

また、 dq 軸座標系で表わした電動機の電磁発生トルク $T_e^{(5)}$ は、

$$T_e = \frac{3}{2} q M (i_{qs} i_{dr} - i_{ds} i_{qr}) \quad (2)$$

と表わせる。但し、各記号についてはTable 1にまとめて示す。

以上のように、本論文では三相の対称軸を固定された dq 軸に座標変換してシミュレーションに用いるが、ここで、電圧、電流に関して両座標系の関係を明らかにしておく。

$$\begin{pmatrix} v_{ds} \\ v_{qs} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} i_{ds} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{qs} \\ i_{qs} \end{pmatrix} \quad (4)$$

2.2 軸系のシミュレーションモデルとその運動方程式

軸系のシミュレーションには Fig. 1 に示すような単純化したモデルを用いる。実際には、軸の一部がリジッドなカップリングで結合されていたり、トルク検出器

Table 1 List of symbols

l_s, l_r	一次二次一相分漏れインダクタンス [H]
L_s, L_r	一次二次一相分自己インダクタンス [H]
M	一次二次間一相当りの最大相互インダクタンス [H]
R_s, R_r	一次二次一相分巻線抵抗 [Ω]
v_{ds}, v_{qs}	一次 d, q 軸電圧 [V]
i_{ds}, i_{qs}	二次 d, q 軸電流 [A]
i_{dr}, i_{qr}	一次 d, q 軸電流 [A]
q	極対数
ω_r	回転子の機械的角速度
P	微分演算子

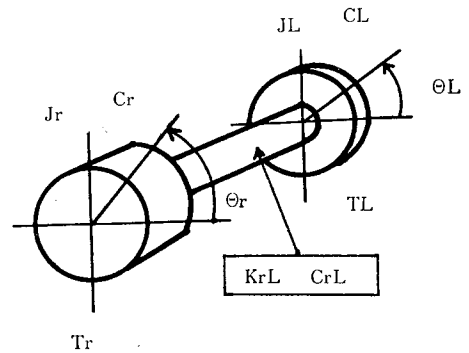


Fig. 1 Theoretical model of the system

が挿入されているが、簡単のためこれらのことは考慮していない。したがって Fig. 1 に示したモデルは、誘導電動機の回転子と慣性負荷を一本の弾性軸で単純に結合したものと考えてよい。

Fig. 1 のモデルを用いて軸系のねじりに関する運動方程式を導くと次式の通りになる。

$$T_e = J_r \frac{d^2 \theta_r}{dt^2} + C_r \frac{d \theta_r}{dt} + C_{rL} \frac{d}{dt} (\theta_r - \theta_L) + K_{rL} (\theta_r - \theta_L) \quad (5)$$

$$0 = T_L + J_L \frac{d^2 \theta_L}{dt^2} + C_{rL} \frac{d}{dt} (\theta_L - \theta_r) + K_{rL} (\theta_L - \theta_r) + C_L \frac{d \theta_L}{dt} \quad (6)$$

また、軸を伝わっていくトルク、即ち軸トルクは、

$$T_{rL} = K_{rL} (\theta_r - \theta_L) + C_{rL} \frac{d}{dt} (\theta_r - \theta_L) \quad (7)$$

と表わせる。但し、各記号の詳細はTable 2に示す。

以上、系の電気的および機械的な基本方程式を示した。計算機を用いて Runge-Kutta-Gill 法によりこれらの数値計算を実行すれば容易に過渡特性を求めることができるが、計算機によるシミュレーションの詳細な方法については、既にこれまでも発表されているので^{5),6)}

Table 2 List of symbols

J_r	電動機回転子の慣性モーメント $[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$
J_L	負荷機械の慣性モーメント $[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$
C_r	電動機回転子の減衰係数 $[\text{Nms/rad}]$
C_L	負荷機械の減衰係数 $[\text{Nms/rad}]$
C_{rL}	連結弾性軸の減衰係数 $[\text{Nms/rad}]$
K_{rL}	連結弾性軸のばね定数 $[\text{Nm/rad}]$
θ_r	電動機回転子の角変位 $[\text{rad}]$
θ_L	負荷慣性体の角変位 $[\text{rad}]$
T_r	電磁発生トルク $[\text{Nm}]$
T_L	負荷トルク $[\text{Nm}]$
T_{rL}	軸伝達トルク $[\text{Nm}]$

本論文では省略する。

3. 軸系のねじり固有振動数および機械的定数の算定法

3.1 ねじり固有振動数 (f_e)

誘導電動機を全電圧始動すると、振動的な電磁トルクを発生することはよく知られている。このトルクが軸をどのような形で伝達していくかを予め知るためには、軸系の固有振動数を求めておく必要がある。これは軸系の設計にとっても重要な要素である¹⁾。

軸系の減衰作用はねじり固有振動数にはほとんど影響を及ぼさないと考えてよい²⁾ から、

$$f_e = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{J_r + J_L K_{rL}}{J_r J_L}} \quad [\text{Hz}] \quad (8)$$

となる。

上式から明かなように、たとえば全体的にシステムが大規模になり、重慣性負荷即ち J_L が大きい場合などには f_e は当然小さくなる。このとき、 f_e が電磁発生トルクの振動周波数に近い場合には、その系は機械的な共振領域にはいり、軸に過大な応力が加わり、危険な状態となることが予想できる。

3.2 弾性軸のばね定数 (K_{rL}) および減衰係数 (C_{rL})

K_{rL} および C_{rL} を正確に求めることはシミュレーションの精度を向上させるための要因の一つである。 K_{rL} については、計算によってある程度正確な数値を得ることができるが³⁾、 C_{rL} は非常に困難である。それは減衰の原因が一つではなく複合的であり、理論的にもまだ不明確であることに起因している³⁾。したがって、実験データを基に算定するのが現状では最も正確であると考えられる。

このデータを得るための実験としては、次の方法が考えられる。まず、負荷の慣性体を強く固定し、電動機に十分なトルクが発生するような電圧を印加する。次に、その電圧を切り、電動機の回転子を自由振動させて、そ

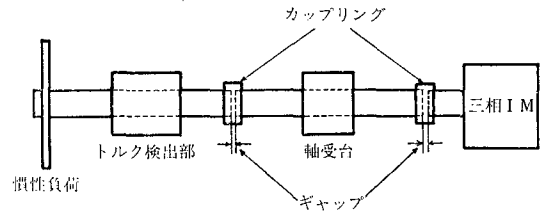


Fig. 2 Configuration of the system

のときの軸トルクの経過を連続的に記録する。この波形はいわゆる不足減衰となるが、その包絡線はある指数関数に従って減衰することが明らかにされており⁴⁾、この性質から C_{rL} を容易に求めることができる。また、同時に K_{rL} も求まる。

本研究では、現在設備の関係上この実験を行なうことが不可能なため、 K_{rL} を従来の計算法⁵⁾ により求め、 C_{rL} をパラメータとして始動特性を計算した。 K_{rL} は次式によって計算できる。

$$K_{rL} = 9.8 \times \frac{10^8}{l} \quad [\text{Nm/rad}] \quad (9)$$

ここで、 l は、軸径が途中変化していたりするので、同一のねじり剛さをもつような軸径 (18.7cm) の標準軸におきかえたときの相当長さを示しており、これは次式で求めることができる。

$$l = \sum l' \left(\frac{18.7}{d} \right)^4 \quad [\text{cm}] \quad (10)$$

但し、 l' は電動機の回転子から負荷の慣性体までの軸径の異なる各軸の長さであり、 d は各軸の直径を示している。なお、実際には Fig. 2 に示す軸の構成となっているが、 K_{rL} を求めるに際し、カップリング部分のギャップを無視し、トルク検出部の内部はその両サイドの軸径と同じになっているものと仮定した。

4. 始動特性の実測および計算結果

4.1 供試機の電氣的諸定数 および系の機械的諸定数

本研究に供した試料機は、5.5 kW, 200 V, 23.2 A, 50 Hz, 4 極の三相特殊かご形誘導電動機である。電氣的諸定数は $R_s = 0.289 [\Omega]$, $R_r = 0.252 [\Omega]$, $L_s + (3/2)L_r = 0.0365 [\text{H}]$, $3M/2 = 0.0349 [\text{H}]$ である。また、電動機、負荷の慣性体および弾性軸を含めた系の機械的諸定数を Table 3 に示す。

4.2 実測方法および結果

始動過渡特性の実測は Fig. 3 に示す装置および実験回路により行なった。

次に実測例を Fig. 4 に示す。同図は任意の時刻に 217 [V], 50 [Hz] の三相電圧を供試機に印加したときの始動特性である。電動機と負荷の慣性体をリジッドなカッ

Table 3 Mechanical constants of the system

J_r	2.709×10^{-2} [kg · m ²]
J_L	6.2×10^{-2} [kg · m ²]
C_r	9.33×10^{-4} [Nms/rad]
C_L	1.095×10^{-3} [Nms/rad]
K_{rL}	1.96×10^{-3} [Nm/rad]
C_{rL}	パラメータとして変動

ブリッジで連結しているため、軸トルクは急峻な瞬時トルクが減衰されることなくそのまま記録されていることがわかる。この電動機の定格トルクは約36.5 [Nm]であるので、軸トルクの瞬時最大値は定格の約4.6倍程度発生していることになる。また、電流は定格の約8.5倍程度発生している。

同図において、電圧が印加される以前から線間電圧が記録されているが、これは電圧印加の時刻を知るためにFig. 3の(V₁)を(V₂)に重ねて記録したためである。

4.3 計算結果

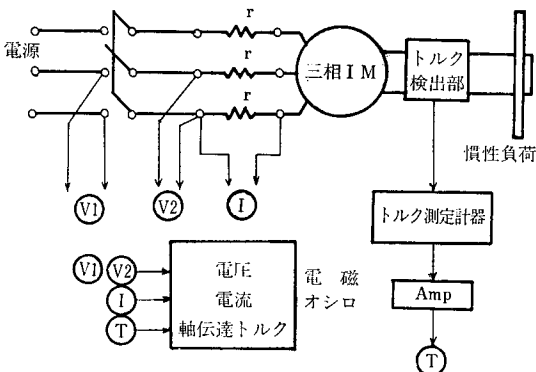
2章で示した誘導電動機の基本方程式と軸系の運動方程式を用いた数値計算例をFig. 5に示す。なお、計算では(a)負荷の回転速度、(b)電流、(c)電磁発生トルク、(d)軸伝達トルク、(e)印加電圧および(f)回転速度と軸伝達トルクの関係の求め、プロッターにより描かせた。

計算時の電氣的、機械的定数は4.1節に示したとおりであるが、 C_{rL} を0.01 [Nms/rad]と仮定した場合の結果である。また、計算きざみは0.001 [s]である。

5. 検 討

5.1 実測および計算結果の比較

次節でも述べるが、多数の計算結果を検討した結果、本研究に供したシステムの場合では、ある範囲内の弾性軸の C_{rL} によって誘導電動機における始動特性の計算結果に相違がみられなかった。そこで、ここでは $C_{rL} =$


Fig. 3 Lay-out of the experiment

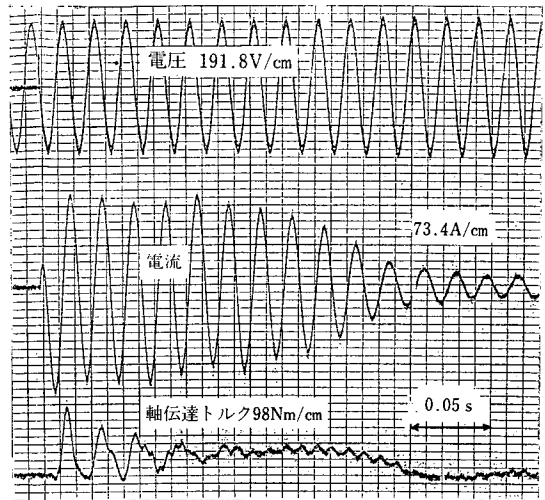
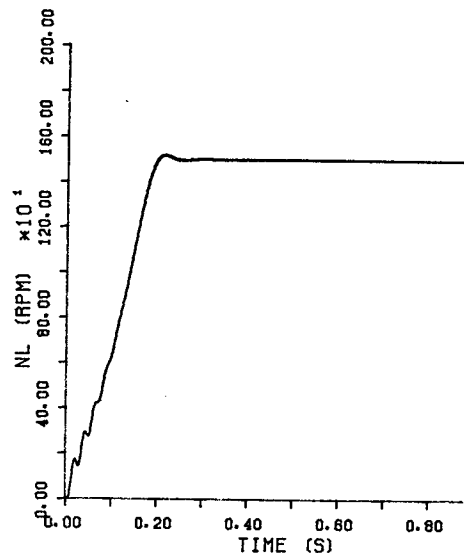
0.001 [Nms/rad]として電流および軸トルクについて、計算結果と実測値を比較する。

Fig. 6は実測結果であり、Fig. 7は計算結果である。両図の縦軸、横軸のスケールを同一にしてあり、計算結果が実測結果に良く一致していることが確認できる。

以上のことから、本論文に示すシミュレーションモデルが非常に簡単化したものであるにもかかわらず、十分実用に供せること、およびシミュレーションの方法が基本的に正しいことを明らかにした。

5.2 計算結果に及ぼす C_{rL} , K_{rL} の影響

弾性軸の C_{rL} を0.0001~1.0まで種々かえて計算を行

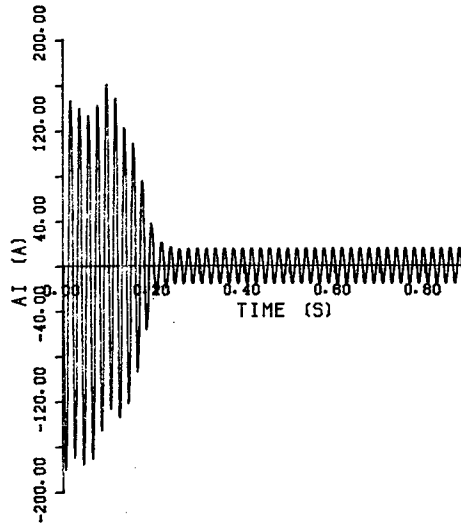

Fig. 4 Experimental results


(a) Speed vs. time

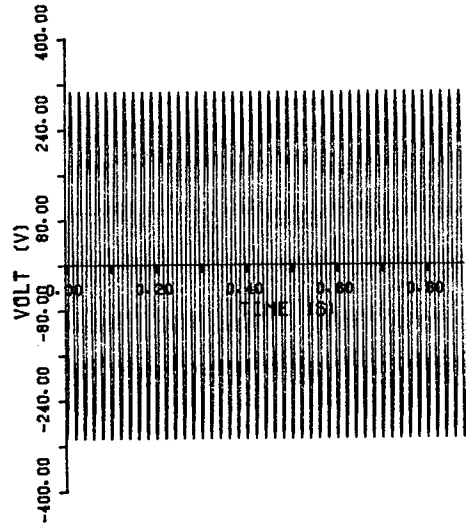
なった結果、供試機の場合ほとんどその相違が始動特性に現われなかった。比較のために C_{rL} が0.0001と0.1の場合における軸トルクのみをFig. 8 (a), (b) に示す。同図より明らかなように両者の差はほとんどない。

次に, K_{rL} をかえた場合について検討する。先の (9)

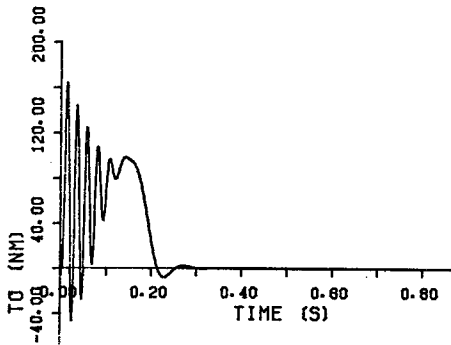
あるいは (10) 式から明らかなように, K_{rL} が小さいということは軸径が大きい,あるいはまた軸長が長いことを意味し,ねじれ易いことを示している。この影響をみるために, 実験に供した弾性軸の K_{rL} よりも小さい 1.0×10^4 [Nm/rad] を採用して計算を行なった。そのと



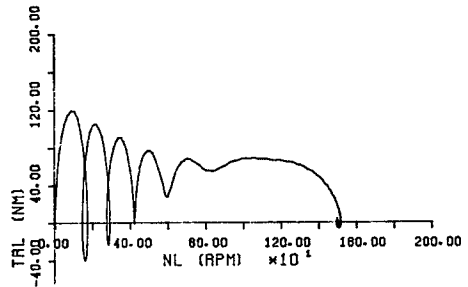
(b) Current vs. time



(e) Supply voltage vs. time

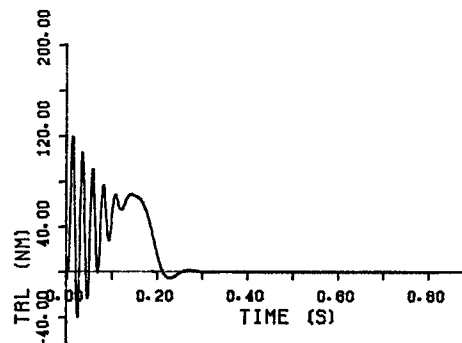


(c) Motor torque vs. time



(f) Shaft torque vs. speed

Fig. 5 Example of the simulation



(d) Shaft torque vs. time

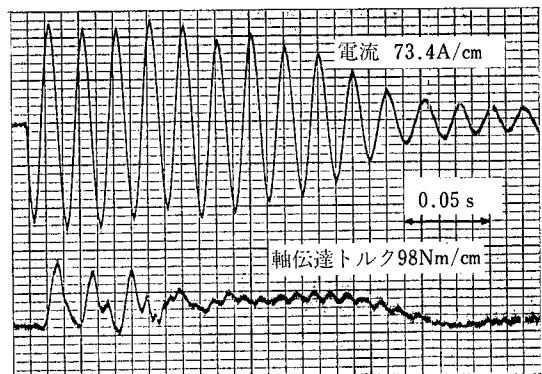


Fig. 6 Experimental results

きの軸トルクの結果を Fig. 9 に示す。同図に示すように、最大トルク付近から負荷トルク（この場合は 0 に収束）にわたる範囲で小さい脈動が生じている。また、Fig. 5 (d) と比較しても明らかなように正方向の瞬時最大トルクが 15 [Nm] 程度、また、負方向のトルクが約 5.5 [Nm] 大きくでている。

以上のように本研究に用いた小規模のシステムにおいて、軸トルクは C_{rL} よりむしろ K_{rL} に、より影響を受けやすいことがわかる。

5.3 始動時における軸伝達トルク

前節までに示した軸トルクの波形は始動直後の 4～5 c/s の間振動しており、この振動数は電源の周波数 50 [Hz] に一致している。(8) 式によってこの軸系の固有振動数を計算すると、 f_e は約 162 [Hz] であるので、電源周波数よりも 3 倍以上も高く、軸トルクは電源の周波数成分が支配的になっていると考えられる。したがって、電磁発生トルクと比較すると、ピーク値は多少小さく減衰されているものの、ほぼ同じ波形を示すことになる (Fig. 5 (c), (d) を参照)。

Fig. 9 では先に述べたように最大トルクから負荷トルクにわたって約 110 c/s の小さな脈動を生じている。この場合の固有振動数を計算すると約 115 [Hz] であり、同図に示された軸トルクの小さな脈動は固有振動数の変動トルクによるものと考えられる。

システムがさらに大規模となり、軸系の f_e が電源の周波数よりもかなり低くなった場合には、軸トルクは固有振動数に支配されるようになる¹¹⁾。

6. む す び

弾性軸を有する誘導電動機系の始動特性を求めるために、まず電動機の基本方程式と軸系の運動方程式を示し、計算機を用いてシミュレーションを行なった。本論文で導いた運動方程式は軸系を非常に単純化したモデルに基づいたものであり、軸系の固有振動数および機械的定数についても述べた。

次に、図で示した実測回路による実測結果を明らかにし、計算結果と比較および検討を行なった。本研究に供したシステムでは、 C_{rL} の影響は 0.0001～1.0 までの範囲でほとんどみられなかったので C_{rL} を 0.001 [Nms/rad] としたときの軸トルクと電流を実測値と比較した。その結果両者ともよく一致することを確認、単純化したシミュレーションモデルが十分実用性のあること、およびシミュレーション法が基本的に正しいことを明らかにした。

また、 K_{rL} の大小による始動時の軸トルク波形の相違および固有振動数との関連などについて計算結果により

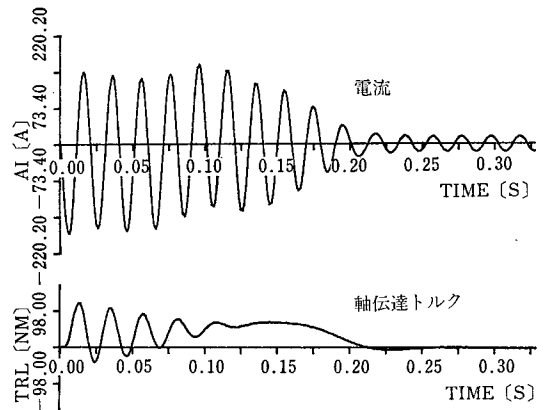
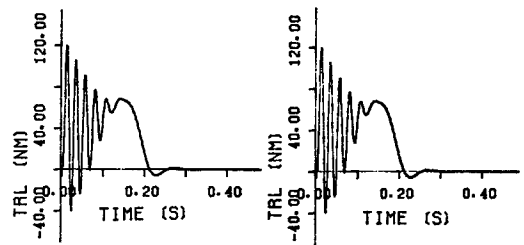


Fig. 7 Simulation results



(a) $C_{rL} = 0.0001$ [Nms/rad] (b) $C_{rL} = 1.0$ [Nms/rad]

Fig. 8 Shaft torque (Simulation)

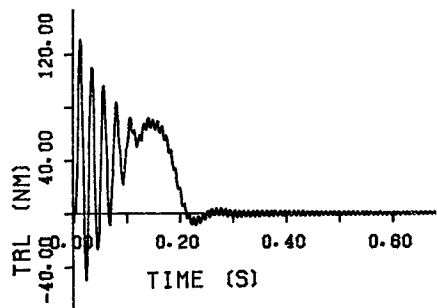


Fig. 9 Shaft torque (Simulation $K_{rL} = 1.0 \times 10^4$ [Nm/rad])

検討した。

本論文では小規模の誘導電動機系のシステムについて、始動特性を明らかにし、検討を加えたが、今後実際的にもさらに重要と考えられる大規模なシステムのねじり共振時における誘導電動機の過渡現象について解析を進める予定である。

終わりに、日頃御指導賜わる本学工学部高木亀一教授ならびに松瀬貢規教授に感謝します。また、本研究を進めるにあたり、計算および実測に御協力を得ました西山ゼミ卒研生神保嘉文君、鈴木重則君に感謝します。な

お、本研究の数値計算は本学計算センターの FACOM
M180 II AD システムにより行なった。

文 献

- 1) 東賞他：同期電動機駆動軸系の過渡現象のデジタルシミュレーションによる解析，三菱技報，Vol. 53, No. 3 (1979)
- 2) 藤田：「電動力応用工学」森北出版 p. 113
- 3) 例えば三木他：運転中における誘導電動機の変周波電源への再投入による過渡トルク，電気学会論文誌 Vol. 100-B, No. 4 (1980)
- 4) 宮入：「電気・機械エネルギー変換工学」丸善 p. 202
- 5) Howard E. Jordan: "Digital computer analysis of induction machines in dynamic systems", IEEE Trans. PAS-86, No. 6, p. 727 (1967)
- 6) Asish K. Desarkar & Gunnar J. Berg: "Digital simulation of three-phase induction motors", IEEE Rotating machinery committee, 69TP, 728-PWR (1969)
- 7) 富山：「内燃機関のねじり振動と疲れ強さ」コロナ社，p. 3
- 8) 「電気計算」電気書院 Vol. 48, No. 7, p. 43
- 9) 遠藤他：タービン・発電機軸ねじり振動時の制動係数の実測昭和58年電気学会全国大会 No. 713
- 10) 谷口他：「機械力学—Ⅱ—」養賢堂 p. 21
- 11) 新良他：誘導電動機の過渡現象および異常現象の直接的シミュレーション，三菱技報 Vol. 48, No. 10 (1974)